Sujet

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x - x\ln x,$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = -\ln x$.
   b. En déduire les variations de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variations.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0{,}5 \\ u_{n+1} & = & u_n - u_n \ln u_n \text{ pour tout entier naturel } n, \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,1]$.
   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0{,}5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
2. **a.** Montrer que la suite (u_n) est convergente.
   b. On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

Partie C

Pour un nombre réel k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_k(x) = kx - x\ln x.$$

1. Pour tout nombre réel k, montrer que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k = \mathrm{e}^{k-1}$.
2. Vérifier que, pour tout nombre réel k, on a : $x_k = y_k$.

Exercice

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3.$$

1. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n \leqslant -1$.

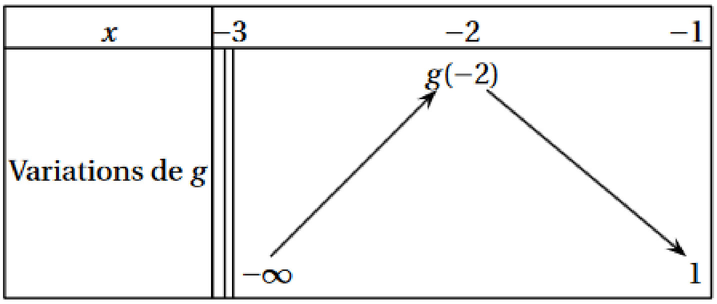
c. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

d. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

2. On se propose d'étudier la fonction g définie sur $]-3\,;\,-1]$ par :

$$g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x.$$

a. Justifier toutes les informations données par le tableau de variations de la fonction g (limites, variations, image de -1)



b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution que l'on notera α et dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-3}.

3. Dans la suite de l'exercice, on considère la suite (v_n) définie pour tout $\in \mathbb{N}$, par :

$$v_n = \ln(0,5u_n + 1,5)\,.$$

a. En utilisant la formule donnée à la question **1. a.**, démontrer que la suite v est arithmétique de raison $\ln(0,9)$.

b. Soit n un entier naturel.
Démontrer que $u_n = v_n$ si, et seulement si $g(u_n) = 0$.

c. Démontrer qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_k = \alpha$.

d. En déduire qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $v_k = u_k$.